

Trolistni voz: Od ravninske krivulje do skulpture

Franc Savnik

Opišemo matematični pristop k oblikovanju skulpture, ki vključuje koncepta Möbiusovega traku in vozla.

Za začetek vzemimo ravninsko krivuljo

$$\mathbf{r} = \mathbf{f}(t) = (\sin 3t \cos t, \sin 3t \sin t, 0); \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right], \quad (1)$$

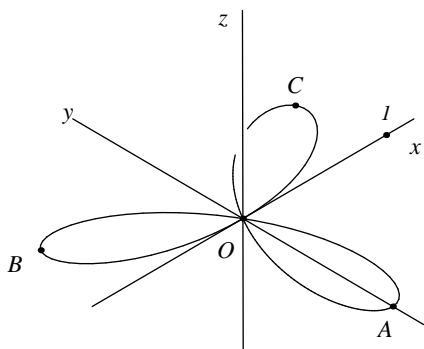
ki jo kaže slika 1. Če naj jo preoblikujemo v stržen skulpture, moramo njene loke zviti v prostor. Ker je krivulja simetrična glede na os y , bomo storili to najprej z lokoma AB in AC . Enačbo loka AB dobimo tako, da v (1) vzamemo $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

Zavrtimo vsako točko $T(\mathbf{f}(t))$ loka AB okoli osi y za kot $t - \frac{\pi}{2}$ v točko T_1 . Označimo $\mathbf{s}(t) = (\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{j})\mathbf{j}$ in s $S(\mathbf{s}(t))$ pravokotno projekcijo točke T na os y (slika 2). Točki T in T_1 ležita na krožnici s središčem S , polmerom $\boldsymbol{\rho}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{s}(t)$ in enačbo

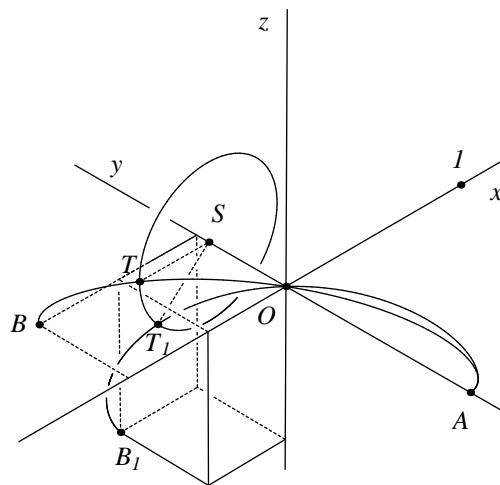
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{s}(t) + \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{\rho}(t) + \sin\left(t - \frac{\pi}{2}\right)\boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{j}.$$

Ko t preteče vse dovoljene vrednosti, dobimo lok AB_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_1(t) = \mathbf{s}(t) + \boldsymbol{\rho}(t) \sin t - \boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{j} \cos t; \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right]. \quad (2)$$



Slika 1. Triperesna deteljica (*trifolium*) z enačbo (1) in umetniškim imenom trolistna roža (*rosa trifolia*).



Slika 2. Lok AB zvijemo okrog osi y in s tem dobimo lok AB_1 . Točka $B(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ se preslika v $B_1(-\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{4})$.

Podobno lahko zvijemo okoli osi y — v nasprotno smer kot AB — še lok AC . Isti učinek dosežemo, če prezrcalimo lok AB_1 čez os y v lok AC_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_2(t) = (-\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{k}); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]. \quad (3)$$

Lok AB_1 nato prezrcalimo še čez premico OB_1 v lok C_1B_1 z enačbo

$$\mathbf{f}_3(t) = 2(\mathbf{f}_1(t) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{f}_1(t); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}], \quad (4)$$

pri čemer je \mathbf{e} enotski vektor osi $\overrightarrow{OB_1}$.

Zlepek usmerjenih lokov AB_1 , AC_1 in C_1B_1 je sklenjena krivulja, ki jo kaže slika 3. V točkah A in B_1 je gladka, v točki C_1 pa ne. Točka A je skupni začetek dveh lokov in njuni tangenti sta v stičišču A nasprotno usmerjeni; podobno se v B_1 stikata konca lokov. Točka C_1 pa je začetek enega in konec drugega loka.

Za stržen skulpture želimo pripraviti gladko krivuljo, zato v enačbi (2) v obeh kotnih funkcijah t nadomestimo z at . Poskus ni uspešen: v točki A ostane sicer krivulja gladka za vsak a , vendar za nobeno vrednost a ni gladka v obeh preostalih stikih zleпка.

Z nekaj sreče najdemo faktor $\sin^2 t$, s katerim razbijemo monotonost izraza at : v obeh kotnih funkcijah enačbe (2) nadomestimo t s funkcijo $\varphi(t) = at \sin^2 t$, kjer je a primerno izbrana konstanta. Dobimo lok AB_2 z enačbo

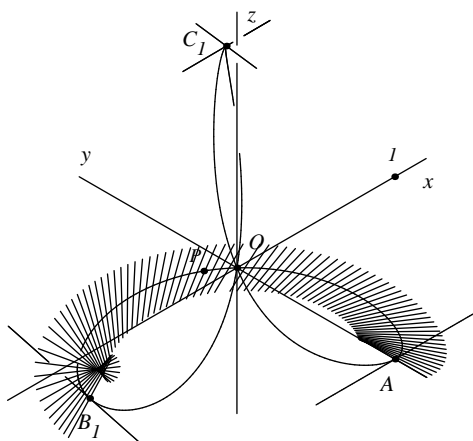
$$\mathbf{g}_1(t) = \mathbf{s}(t) + \sin \varphi(t)\boldsymbol{\rho}(t) - \cos \varphi(t)\boldsymbol{\rho}(t) \times \mathbf{j}; \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]. \quad (5)$$

Prezrcalimo ga čez os y v lok AC_2 z enačbo (6) in čez premico OB_2 v lok C_2B_2 z enačbo (7):

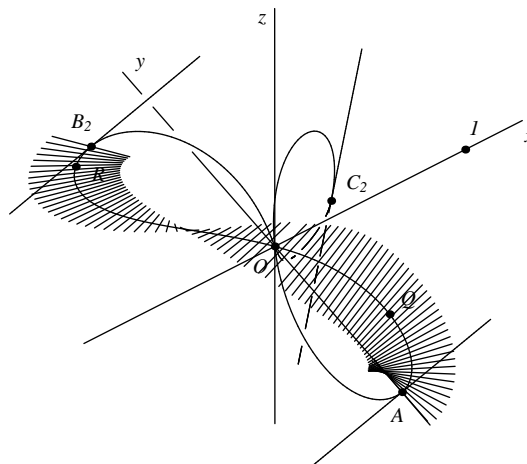
$$\mathbf{g}_2(t) = (-\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{k}); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}], \quad (6)$$

$$\mathbf{g}_3(t) = 2(\mathbf{g}_1(t) \cdot \mathbf{e})\mathbf{e} - \mathbf{g}_1(t); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}], \quad (7)$$

pri čemer je \mathbf{e} enotski vektor osi $\overrightarrow{OB_2}$.



Slika 3. Lok AB_1 prezrcalimo čez os y v lok AC_1 in čez premico OB_1 v B_1C_1 . Zlepek v točki C_1 ni gladek. Lok AB_1 je na odseku AP negativno, na odseku PB_1 pa pozitivno zviti.



Slika 4. Če vzamemo $a = 1.24345655$ in zanemarimo usmerjenost lokov AB_2 , AC_2 in C_2B_2 , kot med lokoma v nobenem stičišču ne presega 10^{-6} kotne stopinje. Normale na lok AB_2 opisujejo njegovo zvijanje.

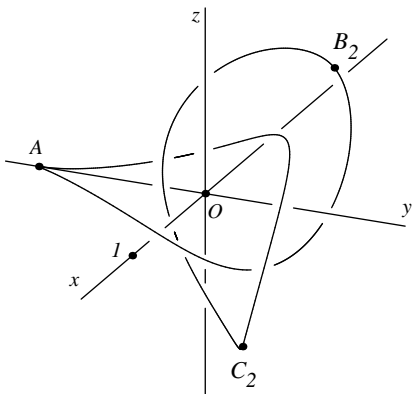
Znano je, da je predznak zvitosti krivulje $\mathbf{r} = \mathbf{f}(t)$ določen s predznakom produkta $\mathbf{f}'(t) \cdot (\mathbf{f}''(t) \times \mathbf{f}'''(t))$. Enačba $\mathbf{f}'_1(t) \cdot (\mathbf{f}''_1(t) \times \mathbf{f}'''_1(t)) = 0$ ima na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ le en koren, ki mu na sliki 3 ustreza točka P . V njej preide leva stran enačbe iz negativnih v pozitivne vrednosti. Enačba $\mathbf{g}'_1(t) \cdot (\mathbf{g}''_1(t) \times \mathbf{g}'''_1(t)) = 0$ pa ima na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$ natanko dva korena, ki jima na sliki 4 ustrezata točki Q in R . Med njima je leva stran enačbe pozitivna, sicer pa ne.

Poskrbeti moramo še, da se loki stržena ne bodo sekali. Označimo z \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} zapored enotske vektorje smeri \overrightarrow{OA} , $\overrightarrow{OB_2}$, $\overrightarrow{OC_2}$. Naj bo Δt izbrani prirastek parametra, $\mathbf{n}_1(t)$ in $\mathbf{n}_2(t)$ pa naj bosta zapored smerna vektorja glavne normale na krivulji (5) in (6). Sedaj vsako točko $T(\mathbf{g}_1(t))$ loka AB_2 premaknemo za

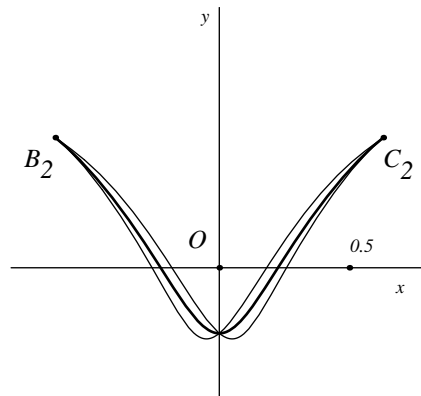
$$\Delta \mathbf{g}_1(t) = |\mathbf{g}'_1(t)| \Delta t (\alpha \mathbf{c} + \beta \mathbf{n}_1(t)) \cos^2 3t.$$

S konstantama α in β uravnavamo izbočenost loka. Ker je $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}$, s faktorjem $\cos^2 3t$ preprečimo izbočenje v krajših loka in ga povečamo na njegovi sredini.

Podobno izbočimo lok AC_2 za $\Delta \mathbf{g}_2(t) = |\mathbf{g}'_2(t)| \Delta t (\alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{n}_2(t)) \cos^2 3t$, lok B_2C_2 pa samo vzdolž \overrightarrow{OA} za $\Delta \mathbf{g}_3(t) = |\mathbf{g}'_3(t)| \Delta t \gamma \mathbf{a} \cos^2 3t$, kjer je γ izbrana konstanta. Zlepek dobljenih lokov je prikazan na sliki 5.



Slika 5. Lok AB_2 izbočimo v smeri $\overrightarrow{OC_2}$ in v smeri aktualne glavne normale. Podobno izbočimo lok AC_2 , lok B_2C_2 pa izbočimo samo vzdolž \overrightarrow{OA} .



Slika 6. Pravokotne projekcije lokov $\mathbf{r} = \mathbf{h}_3(t)$, $\mathbf{r} = \mathbf{h}_4(\frac{4\pi}{3} - t)$ in $\mathbf{r} = \chi(t)$ na ravnino $z = 0$. Projekcija loka $\mathbf{r} = \chi(t)$ je narisana krepko.

Lok B_2C_2 krivulje na sliki 5 ima enačbo

$$\mathbf{h}_3(t) = \mathbf{g}_3(t) + \Delta \mathbf{g}_3(t); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$$

in ni simetričen glede na os y . To hibo odpravimo, če ga najprej prezrcalimo čez os y v lok z enačbo

$$\mathbf{h}_4(t) = (-\mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{i}, \mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{j}, -\mathbf{h}_3(t) \cdot \mathbf{k}); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}].$$

Krivulja

$$\chi(t) = \frac{1}{2}(\mathbf{h}_3(t) + \mathbf{h}_4(\frac{4\pi}{3} - t)); \quad t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$$

je simetrična glede na os y .

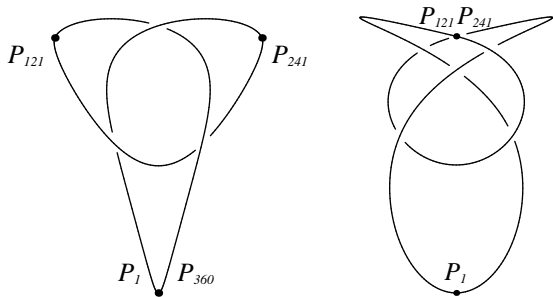
$$\mathbf{h}_1(t) = \mathbf{g}_1(t) + \Delta\mathbf{g}_1(t), \quad \mathbf{h}_2(t) = \mathbf{g}_2(t) + \Delta\mathbf{g}_2(t) \quad \text{in} \quad \chi(t), \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right] \quad (8)$$

je že zelo podoben strženu skulpture. Glede na njegovo konstrukcijo je simetričen glede na os y , koti med tangentami v stičiščih pa ne presegajo 1.5 kotne sekunde. Točke A , B_2 in C_2 tvorijo enakostranični trikotnik s stranico $\sqrt{3}$.

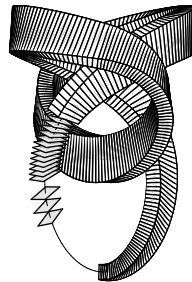
Pri izdelovanju skulpture je ugodno, če ležijo vrhovi trolistnega vozla v ravnini xy . Zlepek (8) zato zasučemo okoli osi y tako, da vsa tri stičišča lokov ležijo v ravnini $z = 0$.

V nadaljevanju nadomestimo zlepek lokov s sklenjeno lomljenko. Njena krajišča dobimo tako, da v enačbi vsakega loka vzamemo za t vrednosti $t = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$; potem je res $t \in [\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}]$. Za $n = 120$ dobimo lomljenko P_1P_2, \dots, P_{360} , ki jo še primerno raztegnemo v smeri koordinatnih osi.

Sedaj v vsakem oglišču P_k postavimo ravnino, ki je pravokotna na tetivo P_kP_{k+1} . V vsako ravnino postavimo krožnico s središčem P_k in polmerom r . Včrtamo ji pravokotnik, ki ga v naslednji krožnici zasučemo okoli središča za kot $\frac{3\pi}{360}$. Tako dobimo model skulpture, ki jo kaže slika 8.

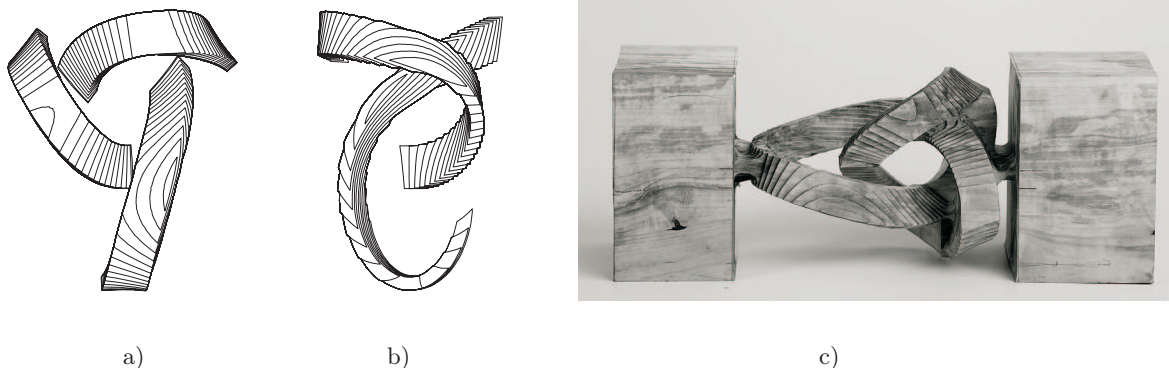


Slika 7. Levo stržen, kot ga ‘vidi’ *Mathematica* iz točke $(0, 0, 10^5)$. Točke P_1 , P_{121} in P_{241} ustrezajo stičiščem lokov (8) in ležijo v ravnini $z = 0$. Desno pogled iz točke $(10^5, 0, 0)$. Točke P_1 , P_{121} in P_{241} ležijo v ravnini $x = 0$, zadnji dve se na sliki prekrivata.



Slika 8. Na stržen nanizamo 360 skladnih pravokotnikov, vsakega na eno stranico lomljenke. Vsak pravokotnik je glede na prejšnjega zasukan okoli osi skozi svoje težišče za kot $\frac{3\pi}{360}$, zadnji glede na prvega za 3π .

Angleški kipar John Robinson je zapisal, da je model skulpture *Immortality* (zasnovane na trolistnem vozlu) izdelal iz stotih vžigaličnih škatlic in iz bakrene cevi, ki jo je ‘*malo zvil na pravih mestih*’. Drugi spet uporabljajo za oblikovanje takih teles specializirano programsko opremo in z njo povezane 3D-tiskalnice, o čemer poroča npr. članek [4]. Zgodbo o izdelavi lesenega trolistnega vozla, podprto s programom v okolju *Mathematica*, najdemo v [5]. V njej je stržen konstruiran ‘po točkah’ z metodo poskusov in zmot, telo pa je zlepljeno iz 80 plasti. Pristop, ki ga opisujem v prispevku, se mi je zdel bolj športen in skulpturo sem izdelal iz enega samega kosa lesa.



Slika 9. a) Preseki skulpture z ravninami $z = kd$, $k = 1, \dots, 19$; d je izbrana konstanta, b) preseki z ravninami $x = kd$, $k = 1, \dots, 22$, c) grobo obdelana skulptura.

Ker površje objekta ni podano z enačbo, naredimo nivojnice tako, da iz njegovega računalniškega modela najprej izrišemo slike zelo tankih plasti, ki so med seboj oddaljene približno za d . Slike vsake plasti spremenimo s kakim risarskim programom v krivuljo in ji nato odstranimo dele, ki iz točke $(0, 0, 10^5)$ oziroma iz $(10^5, 0, 0)$ niso vidni. Izdelamo šablone, ki imajo obliko vidnih delov nivojnic. Po šablonah v grobem obdelamo les z nadmiznim rezkarjem. Višinska razdalja d med nivojnicama je na obdelovancu višina stopnice med dvema nivojema. Simetričnost skulpture glede na os y nam prihrani izdelovanje polovice šablon. Precej lesa ostane pod previsi, zlasti zato, ker strojna obdelava v smeri osi y ni možna. Odstraniti ga je treba ročno.



Viri

- [1] <http://www.bradshawfoundation.com/jr/immortality.php>
- [2] *Mathematica*, verzija 5.0, Wolfram Research, Champaign, 2003
- [3] Weisstein, Eric W., *Rose*, <http://mathworld.wolfram.com/Rose.html>
- [4] Carlo H. Séquin, *Splitting Tori, Knots, and Moebius Bands*, http://www.cs.berkeley.edu/~sequin/PAPERS/Banff05_SplitTori.pdf
- [5] D. Goffinet, *A Wooden Möbius Trefoil Knot*, <http://www.mathematica-journal.com/issue/v5i4/article/goffinet/70-73goffinet.mj.pdf>

Ogledi strani: 29. avgust 2015